「円い三角」の哲学

伊藤眞作

α はじめに

「形容矛盾」という語は、哲学、なかでも論理学でよく使われる用語である。
辞書をひもどくと、
「「円い四角」「木製の鉄」など、名詞にそれがもつ性質と矛盾する意味をもつ形容詞を付すことをいう」
とある。論理上あり得ないこととか、論理上の敗北とか、実在しえないものを指す用語である

「円い三角」も一つの形容矛盾である。
それでは、円い三角は実在しないのであろうか。

β 本論

「円い三角」は、数学上は、一連の数式（関数）として実在するのである。
それでは、これをくわしくみていこう。
「円い三角」とは「円」とも言えるし「三角」とも言える混合物である。
一般に「円い三角」という場合には、大きくは、以下の二つに分類される

(I) 無数の三角形の群れによって埋め尽くされてできる円
(II) 〃 円の 〃 〃 三角形

(I) まずは無数の三角形の群れから考えよう

(i)

(i) $\triangle OAB$ は一辺を 1 とする正三角形である。
したがって

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BO} = 1$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$$

である。$(\pi = 180^\circ)$
ここで $\overline{OA}$（または $\overline{OB}$）を、O を中心として一回転させれば、点 A, B は、この円周上にある。その円の関数は

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1} \quad \cdots\cdots (1)$$

I(ii)

次に △OHB において
ピタゴラスの定理が成り立つから

$$\overline{OB}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HB}^2$$

$$\overline{OH} = r$$

とおけば

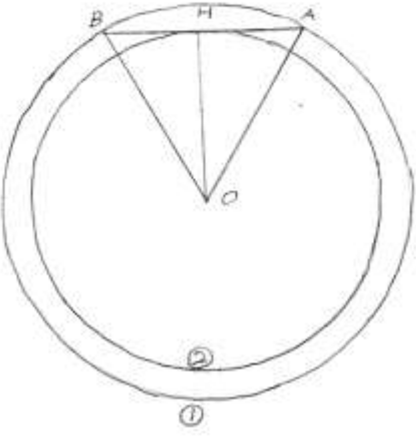
$$1^2 = r^2 + (0.5)^2$$

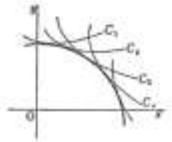
$$r^2 = 1 - (0.5)^2$$

$$= 0.75$$

したがって、$\overline{OH}$ を、O を中心として一回転させたとき
できる円の関数は

$$\boxed{x^2 + y^2 = 0.75} \cdots\cdots\cdots (2)$$





11° 包絡線（包曲線）

$f(x, y, c)=0$ は c を定数とすると，y は x の関数だから1つの曲線となる。c をいろいろ変えると曲線群となる。これらの曲線群に共通に接する曲線（右図太線）をこの曲線群の包絡線または包曲線という。

$f(x, y, c)=0$ の包絡線の方程式は

$$f(x, y, c)=0, \quad f_c(x, y, c)=0$$

から c を消去して得られる。

II 次に、無数の円の群れによって埋め尽された三角形
(i) を考えて見よう。
これには、上に述べた包絡線という概念と、微分の公式が必要になるから、ぜひ目を通しておいてほしい。

「微分積分学要説」木村俊房著 P114 培風館 参照

ここで円の関数

$$f(x, y, C) = (x - C)^2 + y^2 - \frac{1}{2}C^2 = 0 \cdots\cdots (3)$$

において、C は、次第に大きくなる円の群れの半径を表しているから、ここでは C が変数である。

次に、(3)を変数 c で微分すれば y^2 の項が消えて

$$f_c(x, y, c) = -2(x-c) - c = 0 \quad \cdots\cdots (4)$$

(4)より

$$c = 2x \quad \cdots\cdots (5)$$

(5)を(3)に代入して c を消去すれば

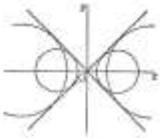
$$(x-2x)^2 + y^2 = \frac{1}{2}(2x)^2$$

$$x^2 + y^2 = 2x^2$$

$$y^2 = 2x^2 - x^2$$

$$= x^2$$

$$\therefore y = \pm x$$



つまり

$$y = +x \quad \cdots\cdots (6)$$

$$y = -x \quad \cdots\cdots (7)$$

これは(1)で定義された円の包絡線である

2つの大小の円の群れの中心は、

$$y = 0 \quad \cdots\cdots (8)$$

の直線上にある。

これらの次第に大きくなる円の群れは、第Ⅰ象限 第Ⅱ象限、第Ⅲ象限、第Ⅳ象限と果てしなく続くが、

ここでは

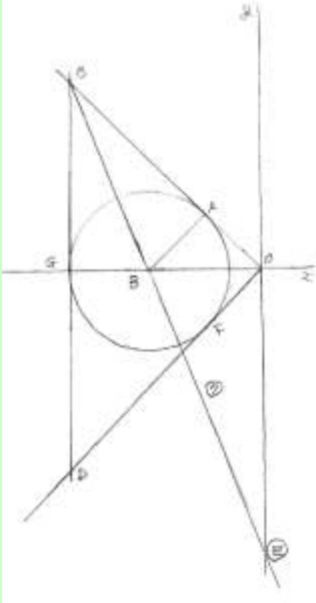
第Ⅱ象限、第Ⅲ象限の、しかも

O(0, 0)からB(−1, 0)までの区間を

対象として扱う。

したがって

x座標は全て(−)である。



II

(ii) $\overline{OG} \perp \overline{CG}$ とすれば、$\triangle OGC$ において、$\angle GOC = \angle GCO = \frac{\pi}{4}$
((6) による)

$\therefore \overline{OG} = \overline{GC}$

また 円 B の接線が OC であることから $\angle OAB =$ 直角

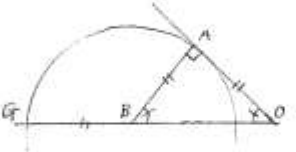
よって、ピタゴラスの定理が成立することにより

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$= 1$$



$$\therefore \overline{OB} = \sqrt{1}$$

$$= 1$$

また、$\angle GBC$ の値を $f'(x)$ は

$$f'(x) = \frac{\overline{GC}}{\overline{BG}}$$

$$= \frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{4}}$$

(GB は円 O の半径だから上記のように $\overline{BG} = -\sin\frac{\pi}{4}$
$\overline{OG} = \overline{GC}$, $\overline{OB} = -1$ なので)

$$\therefore \boxed{f'(x) = -\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

ここで

O $(0, 0)$

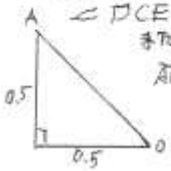
A $(-0.5, +0.5)$

B $(-1, 0)$

C $\left(-1-\sin\frac{\pi}{4}, +1+\sin\frac{\pi}{4}\right)$

D $\left(-1-\sin\frac{\pi}{4}, -1-\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\angle DCE = \angle ECO = \frac{\pi}{8} = \angle ODH = \angle HDC$



また ピタゴラスの定理により

$\overline{AO}^2 = 0.5^2 + 0.5^2 = 0.25 + 0.25$

$= 0.50$

$\overline{AO} = \sqrt{0.50} = 0.7071067812$

$\fallingdotseq \sqrt{0.49} = 0.7$

$\therefore$ A $(-0.5, +0.5)$ である。

Ⅱ (iii) $(x, f(x))$ と (a, b) の二点を通る直線の公式は
その傾きを $f'(x)$ とすると

$$\boxed{f(x) - b = f'(x)(x - a)}$$

であるから，それぞれ代入すると

$$\left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) - b = \frac{1 + \sin\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{4}} \times \left(-1 - \sin\frac{\pi}{4}\right) - 0$$

$$= \frac{\left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right)^2}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$b = -\frac{\left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right)^2}{\sin\frac{\pi}{4}} + \left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -4.121320344 + 1.707106781$$

$$= -2.414213562$$

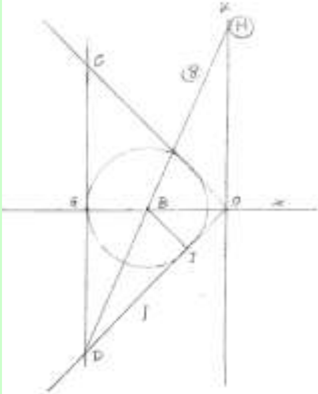
これが b の切片である。次第に大きくなる円はその中心を $\overline{CB}$ 上に持つ。

∴ CEの関数は

$$\boxed{y = -2.414213563x - 2.414213563} \quad \cdots\cdots (10)$$

ここで $x = -1$ のとき $y = 0$
また $y = 0$ のとき $x = -1$
したがって，$B(-1, 0)$ は，この直線上にある。

$\angle ACB = \angle BCG = \frac{\pi}{8}$
直角三角形であることから，
$\triangle ABC \cong \triangle GBC$
∴ $\overline{BC}$ 上に中心を持つ，次第に大きくなる円は，
$\overline{CA}$，$\overline{CG}$ を接線として持つ。
（すなわち，$\overline{CB}$ 上に中心を持つ次第に大きくなる円は，$\overline{BA}$ に平行な半径，$\overline{BG}$ に平行な半径を持つとき，それぞれ，$\overline{AC}$，$\overline{GC}$ と，一点において接する。）



$$\boxed{f'(x) = \frac{-1-\sin\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{4}}}$$

(Ⅳ)（Ⅱ）同様にすれば

$$-(1+\sin\frac{\pi}{4}) - b = \frac{-1-\sin\frac{\pi}{4}}{-\sin\frac{\pi}{4}} \times (-1-\sin\frac{\pi}{4}) - 0$$

$$= \frac{(1+\sin\frac{\pi}{4})^2}{-\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$b = + \frac{(1+\sin\frac{\pi}{4})^2}{\sin\frac{\pi}{4}} - (1+\sin\frac{\pi}{4})$$

$$= +4.121320344 - 1.70710678$$

$$= +2.41421356\,53$$

これがHのY切片，すなわち，

$H(0,\ +2.414213563)$

である。

すなわち，$\overline{DH}$の関数は

$$\boxed{y = +2.414213563x + 2.414213563} \cdots\cdots (11)$$

である。

ここで，$\triangle DBI$と$\triangle DBG$において，

$\overline{BD}$共通

$\angle GDB = \angle IDB = \frac{\pi}{8}$

であるから

$\triangle DBI \equiv \triangle DBG$

したがって$\overline{DI}$，$\overline{DG}$も，$\overline{DB}$上に中心を持つ，次第に大きくなる円の包絡線をなす。

（すなわち$\overline{DB}$上に中心を持つ次第に大きくなる円は$\overline{BG}$に平行な半径，$\overline{BI}$に平行な半径を持つとき，それぞれ$\overline{DG}$，$\overline{DI}$と一点において接する。）

また，$x=-1$のとき $y=0$

$y=0$のとき $x=-1$

したがって

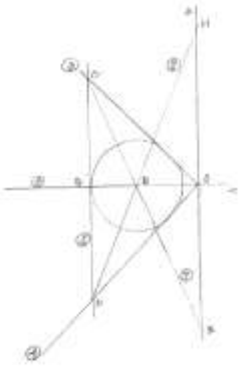
直線DHは点Bを通る。

Ⅲ また△OBHと△OBEにおいて二つとも直角三角形であり
$\overline{OB}$ 共通
∠BHO＝∠BEO　（内対角）
であるので、△OBH≡△OBE
したがって　$\overline{OH}=\overline{OE}$
また、
Ⅱ(ii)の冒頭で述べたように
$\overline{OB}=1$
であるから、
△OBHと△OBE
において、関数の傾きが共に
$f(x)=\pm 2.414213563$
となることを検証することが出来る。
以上をまとめると、

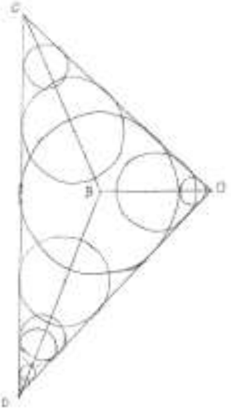
① $x^2+y^2=1$
② $x^2+y^2=0.75$

中心線では関数
③ $y=x$
④ $y=-x$
⑤ $x=-\sin\frac{\pi}{4}$

大小様々な円の群れの中心の通る直線の関数は
⑥ $y=0$
⑦ $y=(-2.414213563)x-(2.414213563)$
⑧ $y=(+2.414213563)x+(2.414213563)$
がそれぞれ成り立つ。



IV.　IIの(i)〜(IV)一目であらわすと下の図のようになる。これを見れば、なぜあんな込み入った計算が必要だったのであるかを了解していただけるであろう。ちなみに△OCDは直角二等辺三角形である。



V　おわりに。

以上のほかにもいくつも考えられます。たとえば正三角形さらには、下の図のような△ABCと円Oが二つ存在するような例も考えうる。ユークリッド平面を考えただけでもざっとこれだけ出てくるのである。ここで平面から離れれば立体的な「円い三角」がリーマン幾何学でも、ロバチェフスキー幾何学でも、それぞれ挙げることが出来る。数学上「丸い三角」は立派に実在するのである。

曲線と直線の矛盾は、古代より数学者たちを魅了してやまないテーマだった。
そして18世紀、これらの研究の成果は、「微分学」として新しい分野を切り開き、今もなお発展を続けている。ここで考えられることは、哲学においても「これは単なる形容矛盾」を一歩踏み込んで、新しい哲学への道をつける一端に心を寄せることも必要ではなかろうかと考える次第である。